Percolation Problem in an Inhomogeneous Bethe Lattice

AUTHOR(S):

宮島, 佐介; 庄司, 一郎

Percolation Problem in an Inhomogeneous Bethe Lattice

大阪大学・工学部　宮　島　佐　介
庄　司　一　郎

Homogeneous Bethe lattice (HBL) における percolation problem は，Essam−Fisher により generating function が求められているので，必要な量は計算できる状況にあるが，inhomogeneous Bethe lattice (IHBL) については余り議論されていないと思う。IHBL の作り方はいろいろ考えられるが，とりあえず次に述べる IHBL で critical percolation probability P_c を求めてみよう。

まず，ベーテ格子になるべき無限個の格子点が存在し，我々はそこにボンドをある確率で置く。HBL では，どこでも，一様な確率 p でボンドが置かれるが，ここでは，IHBL として一つの格子点の周りのボンドの占有率は一様でなく，p_1, p_2, …… p_z であると考える。その状態は各格子点で同じである。ここで p_i は格子点から i −方向に向って出るボンドの占有率である。

この模型の応用は特に考えていないけれどHBLが果樹園の病気の伝染の問題に適用されると言われているが，この問題で考えると，一方向から風が吹くとすると，順風の方向へは伝染し易く，送風の方へは伝染し難いと考えられ，IHBL で考えることが必要になってくる。

応用はともかくとして，上述の模型で p_c を求めてみる。Q_i は任意の格子点で考えて i −方向には無限のクラスターが出来ていない確率とすると

$$Q_i = 1 - p_i + p_i \prod_{j \neq i} Q_j \qquad (1)$$

が成立つ。少し変形すると

$$Q_i^2 - (1 - p_i) Q_i - p_i Q = 0 \qquad (2)$$

ただし　$Q = \prod_j Q_i$ 。
従って

$$Q_i = \frac{1}{2}\{(1-p_i)+\sqrt{(1-p_i)^2 + 4\,p_i\,Q}\} \tag{3}$$

$$\therefore Q = \prod_i \frac{1}{2}\{(1-p_i)+\sqrt{(1-p_i)^2 + 4\,p_i\,Q}\}$$

p_c は Q が Q＝1 なる重根をもつ条件により与えられるので，

$$\sum_{i=1}^{z} \frac{p_i}{1+p_i} = 1 \tag{*4}$$

ここで $z=3$ に限り

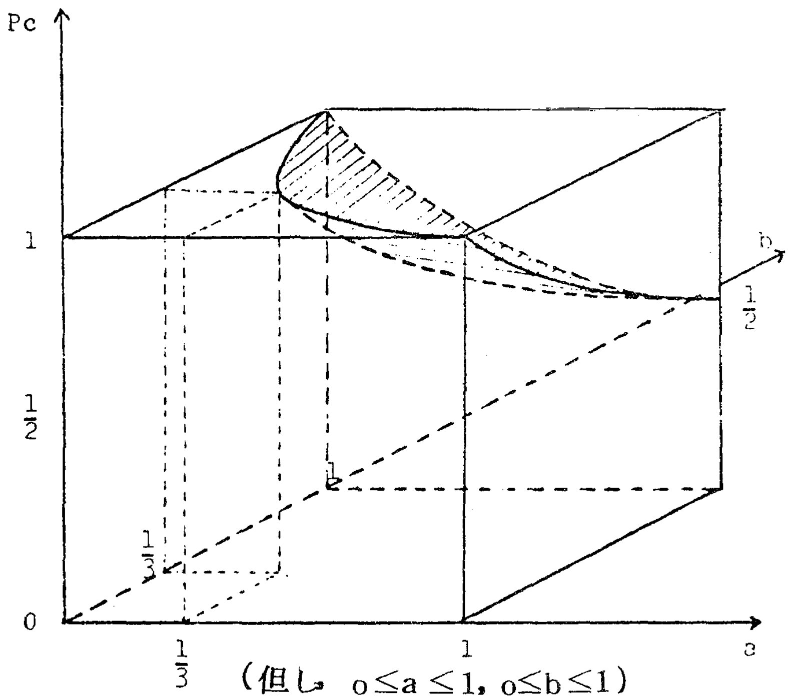
$$p_1 : p_2 : p_3 = 1 : a : b$$

としたとき，p_{1c} は図１の様に得られる。

又，クラスターの大きさ s が p_c の近傍でHBLと同様に

$$s \sim (p-p_c)^{-1} \tag{5}$$

なる形で発散することを，s を p の巾級数で求め ratio method を用いて調べた。



（但し，$0\leq a\leq 1$，$0\leq b\leq 1$）

図１　臨界濃度

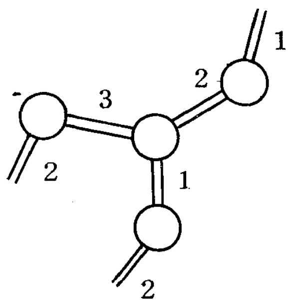
*）この解法は石井氏により指適されたので著者はその後の計算で(4)は次の行列式であらわされることを確かめた。これはもっと簡単な導き方があることを暗示している。

$$\begin{vmatrix} 1 & -p_2 & -p_3 & \cdots\cdots & -p_z \\ -p_1 & 1 & \vdots & & -p_z \\ -p_1 & -p_2 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_1 & -p_2 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

枝 分 れ 高 分 子 の 相 変 化

阪大工　　庄　司　一　郎

模型的に考えて，抗原には f 個の違った「穴」があいていると考え，これに f 種類の抗体の各々が結合できると考える。抗体は棒状で両端が抗原の「穴」にはさまれることができると考える。これらが相結合して右図のように「分子」を作ると考える。この「分子」が「巨大分子」になりうるためには抗原，抗体の数の割合がどのようにあればよいかなどを考える。これらは「木」のような形をしていると考えるので，いわゆる「ベーテ格子」上に配布されていると考えられる。抗原の数 N，各抗体の数 N_k (k＝1，2，－f)， それに分子数 M を一定とする条件のもとにエントロピー極大の原理より最確分布



第１図　木 (n＝3， $\ell_1=\ell_2=\ell_3=1$， $i_1=1$， $i_2=2$， $i_3=0$)